جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2014 / 2015
المادة : نظرية القياس - السنة الثالثة رياضيات
المدة : ساعة ونصف - العلامة : 100.

السؤال الأول (26 درجة):

(أ) عرف كلاً من: الحلقة ، الجبر ، σ-الحلقة ، σ-الجبر على مجموعة X.

(ب) بفرض $X=\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية و $\mathcal{H}$ صف المجموعات **الجزئية في $\mathbb{N}$ المنتهية.**

(ب 1) أثبت أن $\mathcal{H}$ حلقة على $\mathbb{N}$ لكن $\mathcal{H}$ ليس جبراً.

(ب 2) هل $\mathcal{H}$ σ-حلقة أو σ-جبر على $\mathbb{N}$ ؟

السؤال الثاني(24 درجة):

(أ) عرف كلاً من: القياس ، القياس الخارجي ، المجموعة القيوسة.

(ب) أحسب قياس المجموعات التالية بحسب كل من: قياس ليبيغ وقياس العد والقياس الصفري :

$$\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ [0,1]\ ,\ ]-\infty,-3[\ ,\ \{1,2,4,6,8\}.$$

السؤال الثالث (26 درجة):

(أ) متى نقول عن تطبيق $T:(X,\mathcal{F})\longrightarrow(X',\mathcal{F}')$ إنه $(\mathcal{F}-\mathcal{F}')$ قيوس ؟

ومتى نقول عن دالة $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ إنها قيوسة ؟

(ب) أعط مثالين عن تطبيقات قيوسة (بدون إثبات).

(جـ) هل الدوال التالية قيوسة على $\mathbb{R}$ ولماذا:

(1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto f(x)=1$,

(2) $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto f(x)=x^2-1$,

(3) $f+g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

(4) $\dfrac{g}{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

السؤال الرابع (24 درجة):

أثبت أن الدوال التالية كمولة حسب ليبيغ على المجموعة $[0,1]$ مع القياس λ ثم أحسب تكاملها:

(1) $f(x)=x^3+5$. (2) $g(x)=\begin{cases}1 & ; & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & ; & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, (3) $f+g$.

حمص في 12 / 7 /2015

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

توزيع العلامات:

السؤال الأول: (أ) ...يف 3 x 3 = 12 درجة. (ب 1) 4+4 = 8 درجات. (ب 2) 3+3 = 6 درجات.
السؤال الثاني: (أ) 3 تعاريف 3 x 3 = 9 درجات. (ب) 5 مجموعات 3 x 3 = 15 درجة.
السؤال الثالث: (أ) 3+3 = 6 درجات. (ب) 2+2 = 4 درجات.. (جـ) 4 دوال 4 x 4 = 16 درجة.
السؤال الرابع : إثبات أن ...لة كمولة 4 درجات + حساب التكامل 4 درجات = 8 درجات x 3 دوال = 24 درجة.

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس (1)
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٤/ ٢٠١٥
السنة الثالثة - رياضيات

السؤال الأول (٢٦ درجة):

أ) نقول عن صف $\mathcal{H}$ من أجزاء مجموعة X (أي $\mathcal{H} \subset P(X)$) إنه يشكل **حلقة** على X إذا تحقق الشرطان التاليان:
(1) إذا كان $A, B \in \mathcal{H}$ فإن $A \cup B \in \mathcal{H}$.
(2) إذا كان $A, B \in \mathcal{H}$ فإن $A \setminus B \in \mathcal{H}$.

• نقول إن الصف $\mathcal{H}$ يشكل جبراً على X إذا كان حلقة و $X \in \mathcal{H}$.

• نقول إن الصف $\mathcal{H}$ يشكل σ - حلقة على X إذا تحقق الشرطان التاليان:
(1) إذا كان $A, B \in \mathcal{H}$ فإن $A \setminus B \in \mathcal{H}$.
(2) إذا كان $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$.

• نقول إن الصف $\mathcal{H}$ يشكل σ - جبر على X إذا كان σ - حلقة و $X \in \mathcal{H}$.

ب) لدينا $X = \mathbb{N}$ و $\mathcal{H}$ صف المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ المنتهية (أي أن كل عنصر من $\mathcal{H}$ هو مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{N}$).

(ب1) $\mathcal{H}$ حلقة على $\mathbb{N}$ لأن:
إذا كانت $A, B \in \mathcal{H}$ فهذا يعني أن A و B مجموعتين منتهيتين، وبالتالي كل من $(A \cup B)$ و $(A \setminus B)$ مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $A \cup B \in \mathcal{H}$ و $A \setminus B \in \mathcal{H}$.

(ب2) $\mathcal{H}$ ليس جبراً على $\mathbb{N}$ لأن $\mathbb{N} \notin \mathcal{H}$ (لأن $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية).

(ب3) لتكن $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ليست بالضرورة منتهية وبالتالي فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \notin \mathcal{H}$ (دوماً) $\Leftarrow$ $\mathcal{H}$ ليس σ - حلقة
$\Leftarrow$ $\mathcal{H}$ ليس σ - جبر (يمكن استنتاج هذا أيضاً من كون $\mathcal{H}$ ليس جبراً)

السؤال الثاني (٤٢ درجة):

(أ) القياس: هو دالة مجموعات معرفة على صف $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\mu : \mathcal{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$
$$A \longmapsto \mu(A)$$

وتحقق مايلي:

(١) $\mu(\phi) = 0$.

(٢) إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ مجموعات منفصلة مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$

فإن $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (أي أن μ دالة σ-جمعية).

القياس الخارجي: هو دالة مجموعات:

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$
$$A \longmapsto \mu^*(A)$$

تحقق مايلي:

(١) $\mu^*(\phi) = 0$.

(٢) إذا كان $A \subset B$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(٣) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

المجموعة المقيوسة بالنسبة لقياس خارجي μ^*:

نقول إن المجموعة E مقيوسة وفقه μ^* إذا تحقق:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

(ب)

المجموعة	قياس ليبيغ	قياس العد	القياس الصفري
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	0	∞	0
$\mathbb{R}$	∞	∞	0
$[0,1]$	1	∞	0
$]-\infty, -3[$	∞	∞	0
$\{1,2,4,6,8\}$	0	5	0

السؤال الثالث (٦ درجة) :

(أ) • نقول عن التطبيق $T:(X,\mathcal{F}) \longrightarrow (X',\mathcal{F}')$ إنه تطبيق $(\mathcal{F}-\mathcal{F}')$ قيوس
اذا كان $T^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$.

• نقول إن الدالة $f: X \longrightarrow R$ إنها قيوسة اذا كانت المجموعة
$E(f>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c .
(أو إذا كانت احدى المجموعات $E(f\geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f\leq c)$
قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c).

(ب) مثالين عن التطبيقات القيوسة : التطبيق المستمر والتطبيق الثابت .
(يمكن ذكر هكذا تطبيقات صراحة) .

(جـ) - الدالة f قيوسة لأنها ثابتة (أو لأنها مستمرة ، أو حسب التعريف) .
• الدالة g قيوسة لأنها مستمرة (أو حسب التعريف) .
• الدالة $f+g$ قيوسة لأنها مجموع دالتين قيوسيتين .
(أو لأن $f+g = x^2$ مستمرة أو ....)
• الدالة $\frac{g}{f}$ قيوسة لأن كلاً من f و g قيوسة كما أن $f(x) \neq 0$ مهما
تكن $x \in R$ (أو لأن $\frac{g}{f} = g$ وهي قيوسة) .

السؤال الرابع (٤ درجة) :

نطبق المبرهنة التي تنص على أن : الدالة f المحدودة تكون كمولة اذا وفقط
اذا كانت قيوسة ، حيث لدينا هنا $E = [0,1]$ مجموعة محدودة .

• بالنسبة للدالة f لدينا مايلي :
إنها محدودة لأن :
$$|f(x)| = |x^3+5| \leq 6 \quad ; \forall x \in [0,1]$$

وهي قيوسة لأنها مستمرة .
لذلك تكون f دالة كمولة حسب ليبيغ وتكاملها هو :
$$(L)\int_{[0,1]} f(x)d\lambda = (R)\int_0^1 (x^3+5)dx = \frac{x^4}{4} + 5x\Big]_0^1 = \frac{21}{4} .$$
(كما يمكن القول إن الدالة f مستمرة ومحدودة فهي كمولة حسب ريمان وبالتالي حسب ليبيغ)

بالنسبة للدالة g لدينا ما يلي :

إنها محدودة لأن :

$$|g(x)| \le 1 \quad ; \quad \forall x \in [0,1]$$

وهي قيوسة لأنه من أجل أي عدد حقيقي c لدينا :

$$E(g>c) = \begin{cases} [0,1] & ; \quad c<0 \\ [0,1]\cap\mathbb{Q} & ; \quad 0\le c<1 \\ \phi & ; \quad c\ge 1 . \end{cases}$$

بذلك تكون الدالة g كمولة حسب ليبيغ (كونها قيوسة ومحدودة) وتكاملها هو.

$$(L)\int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda = \underbrace{(L)\int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} 1\,d\lambda}_{=0} + \underbrace{(L)\int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} 0\,d\lambda}_{=0} = 0+0=0$$

لأن $\lambda([0,1]\cap\mathbb{Q})=0$ ‏ لأن الدالة المكاملة $g(x)=0$ على المجموعة

مدرس المادة : د. ابراهيم ابراهيم

• الدالة $f+g$ كمولة لأنها مجموع دالتين كموليتين هما f و g ويكون :

$$(L)\int_{[0,1]} [f(x)+g(x)]\,d\lambda = (L)\int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda + (L)\int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda$$

$$= \frac{21}{4} + 0 = \frac{21}{4}$$

جامعة البعث — امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي 2013 / 2014

كلية العلوم — المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات

قسم الرياضيات — العلامة: 100 درجة. المدة: ساعة ونصف. اسم الطالب:

السؤال الأول (24 درجة):

ضع كلمة صح أو خطأ لكل من العبارات التالية وصحح العبارات الخاطئة:

- (1) جبر بوريل $\mathcal{B}(X)$ هو $\sigma-$ الجبر المولد بصف المجموعات المفتوحة في X.

(2) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ تكون اما منتهية أو محدودة.

(3) تكون الدالة المميزة I_A قيوسة إذا وفقط كانت المجموعة A قيوسة.

(4) مجموعة كانتور C هي مجموعة قيوسة حسب ليبيغ وغير عدودة وقياسها $\lambda(C)=0$.

(5) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل:

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n\in N,\ A_i\in H,\ A_i\cap A_j=\phi\ ;\ i\neq j\right\}.$$

(6) كل نصف حلقة هي نصف جبر وكل حلقة هي جبر.

(7) الصف $\{\phi, A, A^c, X\}$ يشكل $\sigma-$ جبر على أي مجموعة X (حيث A مجموعة جزئية من X).

(8) المجموعة الخالية ϕ قيوسة بحسب أي قياس خارجي بينما المجموعة الكلية X ليست بالضرورة قيوسة.

السؤال الثاني (26 درجة):

— (أ) عرف كلاً من: القياس – القياس الخارجي – المجموعة القيوسة.

— (ب) بفرض μ^* قياساً خارجياً على المجموعة X، أثبت أن صف المجموعات القيوسة M_{μ^*} يشكل $\sigma-$ جبر على X.

— (ج) هل يشكل المقصور $\mu^*\big|_{M_{\mu^*}}$ قياساً؟ وعلى من؟

السؤال الثالث (25 درجة):

— (أ) عرف الدالة القيوسة واذكر شرطاً مكافئاً للتعريف.

(ب) أثبت أن الدوال التالية قيوسة على المجموعة $E=[0,1]$:

$$f(x)=\sin x+25,\quad g(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & ;\ x\in[0,1]\setminus Q.\end{cases},\quad f(x)+g(x).$$

السؤال الرابع (25 درجة):

— (أ) عرف تكامل ليبيغ لكل من: الدالة البسيطة غير السالبة - الدالة القيوسة والمحدودة - الدالة القيوسة وغير السالبة.

(ب) احسب تكامل ليبيغ للدوال التالية على المجموعة $E=[0,5]$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le x\le 1\\ 0 & ;\ 1<x\le 5.\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x+1 & ;\ 0\le x\le 1\\ (x-1)^2 & ;\ 1<x\le 5.\end{cases}$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح — مدرس المادة: د. إبراهيم [illegible]

(٧)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس / سنة ثالثة رياضيات
الدورة الإضافية للعام ٢٠١٣ / ٢٠١٤

جواب السؤال الأول (٤٠ درجة):

(١) صح.
(٢) خطأ: قد تكون منتهية أو محدودة أو غير ذلك.
(٣) صح.
(٤) صح.
(٥) صح.
(٦) خطأ: كل نصف جبر هو نصف حلقة وكل جبر هو حلقة.
(٧) صح.
(٨) خطأ: كل من ϕ و X مجموعة قيوسة حسب أي قياس خارجي لأن $\phi = X^c$.

جواب السؤال الثاني (٦٠ درجة):

(أ) القياس: هو دالة مجموعة:

$$\mu : \mathcal{H} \longrightarrow [0, +\infty] \; ; \; A \longmapsto \mu(A)$$

تحقق ما يلي: ① $\mu(\phi) = 0$

② إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$ فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

القياس الخارجي هو دالة مجموعة:

$$\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, +\infty] \; ; \; A \longmapsto \mu^*(A)$$

تحقق ما يلي: ① $\mu^*(\phi) = 0$

② إذا كانت $A \subset B \Leftarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

③ إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in 2^X$ فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

المجموعة القيوسة: تكون المجموعة E قيوسة حسب μ^* إذا كان:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \; ; \; \forall A \in 2^X.$$

Scanned by CamScanner

(٢)

5) ب) ① معلوم أن كلاً من ϕ و X قيوسة حسب μ^* ⇐ $X, \phi \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

② إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ، أي إن A_i مجموعات قيوسة ، ⇐ i A_i

مجموعة قيوسة (يجب برهنة) ⇐ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$:

③ يمكن ذكر أحد الشرطين التاليين:

~~١- إذا كانت $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ⟵ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ محققة فيها X~~

أو ٢- إذا كانت $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ وهذا محقق لأن متممة المجموعة القيوسة تكون بدورها قيوسة. ⇐ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يشكل σ-جبر.

ج) المقصور $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ يشكل قياساً ... على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

جواب السؤال الثالث (٢٥ درجة):

(أ) تكون الدالة f قيوسة E ⊂ إذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c.

شرط مكافئ: إحدى المجموعات $E(f \geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f \leq c)$ قيوسة من أجل أي عدد c.

(ب) الدالة f مستمرة فهي قيوسة (برهنة)

الدالة g هي دالة ديريخليه وهي قيوسة لأنه من أجل أي عدد c لدينا:

$$E(g>c) = \begin{cases} [0,1] & ; \ c<0 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q} & ; \ 0 \leq c \leq 1 \\ \phi & ; \ c>1 \end{cases}$$

الدالة $f+g$ هي دالة قيوسة لأنه مجموع دالتين قيوستين هي دالة قيوسة (برهنة).

جواب السؤال الرابع (٢٥ درجة):

(٢) تكامل ليبيغ لدالة بسيطة وغير سالبة

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot I_{A_i}$ هو العدد:

$$\int_E \varphi d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة والمحدودة:

نفرض $\lambda(E) < +\infty$ ونعرف تكامل ليبيغ الأعلى والأدنى للدالة f بالشكل:

$$(\overline{L})\int_E f d\lambda = \inf\{ \int_E \varphi d\lambda : \varphi \text{ دالة بسيطة و } \varphi \geq f \},$$

$$(\underline{L})\int_E f d\lambda = \sup\{ \int_E \psi d\lambda : \psi \text{ دالة بسيطة و } \psi \leq f \}.$$

عندئذ تكون الدالة f كمولة في E إذا كان:

$$(\overline{L})\int_E f d\lambda = (\underline{L})\int_E f d\lambda.$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة وغير السالبة:

$$\int_E f d\lambda = \sup\{ \int_E h d\lambda : h \text{ دالة قيوسة ومحدودة على } E \ ; \lambda(E(h \neq 0)) < \infty \}$$

(ب) حساب التكاملات:

الدالة f بسيطة وهي قيوسة ومحدودة وتكاملها:

$$\int_E f d\lambda = 1 \cdot \lambda([0,1]) + 0 \cdot \lambda((1,5]) = 1 \cdot 1 + 0 = 1.$$

الدالة g كمولة حسب ريمان فهي كمولة حسب ليبيغ ويكون:

$$(L)\int_E g d\lambda = (R)\int_0^5 g(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^5 (x+1)^2 dx =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{(x+1)^3}{3}\Big]_1^5 = \frac{3}{2} + \frac{215}{3} = \frac{348}{6}.$$

مدرس المادة:
د. ابراهيم ابراهيم

(٥)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2013 / 2014
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة.

اسم الطالب: بتول

السؤال الأول (25 درجة): ٥ × ٥ = ٥٢٥

العبارات التالية غير دقيقة ، مطلوب كتابتها بشكل صحيح ودقيق :

(1) يتألف جبر بوريل من مجموعات مفتوحة أو مغلقة أو محدودة فقط .

(2) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ تكون غير منتهية أو غير محدودة .

(3) تكون الدالة المميزة I_A دوما قيوسة سواء كانت المجموعة A قيوسة أو لا .

(4) مجموعة كانتور C هي مجموعة قيوسة حسب ليبيغ وعدودة وقياسها $\lambda(C)=1$.

(5) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل :

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{?} A_i : A_i \in H.\right\}.$$

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) عرف كلاً من : القياس – القياس الخارجي – المجموعة القيوسة .

(ب) بفرض μ^* قياساً خارجياً على المجموعة X ، أثبت أن صف المجموعات القيوسة $\mathcal{M}$ يشكل σ – جبر على X .

(ج) هل يشكل المقصور $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ قياساً ؟ وعلى من ؟ (بدون إثبات)

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) عرف الدالة القيوسة .

(ب) أثبت أن الدوال التالية قيوسة على المجموعة $E=[0,1]$:

$$f(x)=x^2+2x-1, \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x\in[0,1]\cap Q \\ 0 & ; \ x\in[0,1]\setminus Q. \end{cases}$$

السؤال الرابع (25 درجة):

(أ) عرف تكامل ليبيغ لكل من : الدالة البسيطة غير السالبة – الدالة القيوسة والمحدودة – الدالة القيوسة وغير السالبة .

(ب) احسب تكامل ليبيغ للدوال التالية على المجموعة الموافقة لكل منها :

$$g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ -1\le x\le 0 \\ 2 & ; \ 0<x<5 \\ 5 & ; \ x=5. \end{cases} \quad , \quad h(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & ; \ 1<x\le 10. \end{cases}$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 22 / 6 / 2014 .

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس/ س ٣ رياضيات

الفصل الثاني ٢٠١٢ / ٢٠١٤

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول (٥٠ درجة):

(١) يتألف صف بوريل من مجموعات مفتوحة ومغلقة ومحدودة وغير محدودة وغير مفتوحة وغير ذلك.

(٢) كل مجموعة قيوسة حسب لبيغ قد تكون منتهية أو غير منتهية محدودة أو غير محدودة

(٣) تكون الدالة المميزة I_A قيوسة إذا وفقط إذا كانت المجموعة A قيوسة.

(٤) مجموعة كانتور C قيوسة حسب لبيغ وقياسها $\lambda(C)=0$ وهي غير معدودة

(٥) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل:

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i\in\mathcal{H},\ A_i\cap A_j=\phi,\ i\neq j,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

السؤال الثاني (٥٠ درجة):

(أ) القياس: هو دالة مجموعة

$$\mu:\mathcal{H}\longrightarrow(-\infty,+\infty]$$
$$A\longmapsto\mu(A)$$

تحقق ما يلي:

① $\mu(\phi)=0$

② إذا كانت $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{H}$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{H}$ فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

القياس الخارجي: هو دالة مجموعة

$$\mu^*:2^X\longrightarrow(-\infty,+\infty]$$
$$A\longmapsto\mu^*(A)$$

تحقق ما يلي:

① $\mu^*(\phi)=0$

② $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

③ $A\subset B\Rightarrow\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

المجموعة القيوسة: تكون المجموعة E قيوسة حسب μ^* إذا تحقق:

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)\ ;\ \forall A\in 2^X.$$

(ب) - نعلم أن ϕ مجموعة قيوسة وبالتالي $\phi \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

وبالتالي $X = \phi^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

- اذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فيكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ حسب مبرهنة،

- اذا كانت $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

~~فيس يكون $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-حلقة في X وهي $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.~~

أي أن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-جبر في X.

(جـ) المقصور $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ يشكل قياس على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

(أ) تكون الدالة f قيوسة اذا كانت المجموعة $E(f > c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c (أو احدى المجموعات $E(f \geq c)$, $E(f < c)$, $E(f \leq c)$):

(ب) الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 1$ مستمرة على المجال $[0,1]$ فهي قيوسة. (ويمكن تطبيق التعريف).

. الدالة $g(x)$ هي دالة ديريكليه، حيث نجد من أجل أي عدد c:

$$E(g > c) = \begin{cases} E & ; c < 0 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q} & ; 0 \leq c < 1 \\ \phi & ; c \geq 1 \end{cases}$$

المجموعات في الطرف الأيمن كلها قيوسة لذلك تكون المجموعة $E(g > c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c وبالتالي الدالة g قيوسة.

السؤال الرابع (٢٥ درجة):

(أ) تكامل ليبيغ لدالة بسيطة وغير سالبة $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$ هو:

$$\int_E \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة والمحدودة:

نفرض $\lambda(E) < \infty$ ونعرف تكامل ليبيغ الأعلى والأدنى للدالة f بالشكل:

$\varphi \geq f\}$ - ، φ دالة بسيطة : $(\bar{L}) \int_E f\,d\lambda = \inf \{ \int_E \varphi(x)\,d\lambda$

$\psi \leq f\}$ ، ψ دالة بسيطة : $(\underline{L}) \int_E f(x)\,d\lambda = \sup \{ \int_E \psi(x)\,d\lambda$

تكون الدالة f قابلة للتكامل إذا كان

$$(\bar{L}) \int_E f(x)\,d\lambda = (\underline{L}) \int_E f(x)\,d\lambda$$

تكامل ليبيغ للدالة القياسية وغير السالبة

$\lambda(E(h \neq 0)) < \infty$; h دالة قياسية ومحدودة $\in E$: $\int_E f(x)\,d\lambda = \sup \{ \int_E h(x)\,d\lambda$ (ب)

$$1) \int_{[-1,5]} g(x)\,d\lambda = 1 \cdot \lambda([-1,0]) + 2 \cdot \lambda((0,5)) + 5 \cdot \lambda(\{5\})$$
$$= 1 \cdot (1) + 2 \cdot (5) + 5 \cdot 0 = 11$$

$$2)\ (L)\int_{[0,10]} h(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{10} h(x)\,dx = (R)\int_0^1 x^2\,dx + (R)\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 - \frac{1}{x}\Big]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + 1 = \frac{37}{30}$$

الدالة h قابلة حسب ريمان لذلك يكون تكامل ليبيغ لها = تكامل ريمان

(يمكن الحل بطرق أخرى).

مدرس المادة / د. ابراهيم ابراهيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012 / 2013
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة.
اسم الطالب:

سلم التصحيح

السؤال الأول (28 درجة):

(أ) اذكر تعريف كل من : نصف الحلقة ، نصف الجبر ، الحلقة ، الجبر ، مع إعطاء مثال عن كل منها . ٤×٣ = ١٢

(ب) لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن $H = 2^N$ صف كل المجموعات الجزئية في N
اثبت أن H يشكل σ – حلقة و σ – جبر على N. ٤×٤ = ١٦

السؤال الثاني (27 درجة):

لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E=[0,8]$ بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le x\le 1\\ 2 & ; \ 1<x<2\\ 3 & ; \ 2\le x\le 4\\ 0 & ; \ 4<x<8\\ 6 & ; \ x=8.\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le x\le 1\\ 2 & ; \ 1<x\le 2\\ 5 & ; \ 2<x<8\\ 6 & ; \ x=8.\end{cases}$$

المطلوب : (أ) هل هذه الدوال بسيطة ؟ وإذا كان الجواب " نعم " اكتب التمثيل الطبيعي لها . ٣×٢ = ٦

(ب) احسب التكاملات التالية :

$$\int_E f(x)\,d\lambda \ \ (٦) \quad , \quad \int_E g(x)\,d\lambda \ \ (٦) \quad , \quad \int_E [f(x)+g(x)]\,d\lambda \ \ (٦).$$

السؤال الثالث (21 درجة):

(أ) اذكر تعريف " الخاصة تقريبا في كل مكان " (٥)

(ب) اثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريبا في كل مكان على R : (٨)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ x\in R\setminus N\\ 1 & ; \ x\in N.\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ x\in R\setminus N\\ 10 & ; \ x\in N.\end{cases}$$

(ج) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل : (٨)

$$f_n(x)=x^n \ ; \quad x\in[0,1] \ , \ n=1,2,....$$

اثبت أن هذه المتتالية متقاربة تقريبا في كل مكان من الدالة $f(x)=0$.

السؤال الرابع (24 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ وصحح الخطأ فيما يلي : ٦×٤ = ٢٤

(1) دالة ديريخليه غير كمولة حسب ريمان وغير كمولة حسب ليبيغ .

(2) متتالية المجموعات $A_n=[0,n+1]$ متناقصة ونهايتها $[0,+\infty)$ ، بينما متتالية المجموعات $B_n=[n+1,+\infty)$ متزايدة ونهايتها ϕ

(3) صف المجموعات القيوسة حسب ليبيغ يشكل حلقة لكنه لا يشكل σ – جبر .

(4) إذا كانت $\{H_\alpha : \alpha\in I\}$ أسرة من الجبور على مجموعة X فإن التقاطع $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ لا يشكل جبراً على X .

(5) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة .

(6) حتى تكون الدالة $f(x)$ قيوسة حسب ليبيغ على المجموعة E يجب أن تكون $f(x)$ مستمرة .

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 21 / 8 / 2013 .

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث — سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
كلية العلوم — السنة الثالثة رياضيات
قسم الرياضيات — الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول (٨ درجة):

~~يكون الصف H نصف حلقة في X إذا تحقق ما يلي:~~

(أ) نصف الحلقة: يكون الصف H نصف حلقة في X إذا تحقق ما يلي:

1) $A, B \in H \Rightarrow A \cap B \in H$

2) $A, B \in H \Rightarrow \exists C_1, C_2, \dots, C_n \in H \; ; \; C_i \cap C_j = \phi \; , \; A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$

مثال: $H = \{[a,b) : -\infty < a < b < +\infty\} \cup \phi$

نصف الجبر: هو نصف حلقة فيه $X \in H$.

مثال: 2^X (يوجد غيره)

الحلقة: يكون H حلقة في X إذا تحقق ما يلي:

1) $A, B \in H \Rightarrow A \cup B \in H$

2) $A, B \in H \Rightarrow A \setminus B \in H$

مثال: 2^X (توجد أمثلة أخرى)

الجبر: هو حلقة فيه $X \in H$.

مثال: 2^X (توجد أمثلة أخرى).

(ب) لدينا هنا $H = 2^N$.

(١) لتكن $A_1, A_2, \dots \in H$ عندئذ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$ لأنه ستكون مجموعة جزئية من N.

(٢) لتكن $A, B \in H$ عندئذ $A \setminus B \in H$ لنفس السبب السابق

لذلك يكون H σ-حلقة في N.

وبما أن $N \in 2^N = H$ فيكون 2^N σ-جبر في N.

سؤال الثاني (٧ درجة)

ب

(٣) نعم كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال بسيطة لأنها تأخذ قيم ثابتة على مجموعات جزئية من E، والتمثيل الطبيعي لها هو:

$$f(x) = 1\cdot I_{[0,1]}(x) + 2\cdot I_{(1,2)}(x) + 3\cdot I_{[2,4]}(x) + 0\cdot I_{(4,8)}(x) + 6\cdot I_{\{8\}}(x)$$

$$g(x) = 1\cdot I_{[0,1]}(x) + 2\cdot I_{(1,2]}(x) + 5\cdot I_{(2,8)}(x) + 6\cdot I_{\{8\}}(x).$$

(ب) حساب التكاملات:

$$\int_{[0,8]} f(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,1]) + 2\cdot\lambda((1,2)) + 3\cdot\lambda([2,4]) + 0\cdot\lambda((4,8)) + 6\cdot\lambda(\{0\})$$

$$= 1(1) + 2(1) + 3(2) + 0 + 6(0) = 9.$$

$$\int_{[0,8]} g(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,1)) + 2\cdot\lambda((1,2]) + 5\cdot\lambda((2,8)) + 6\cdot\lambda(\{8\})$$

$$= 1(1) + 2(1) + 5(6) + 6(0) = 33.$$

$$\int_{[0,8]} [f(x)+g(x)]\,d\lambda = \int_{[0,8]} f(x)\,d\lambda + \int_{[0,8]} g(x)\,d\lambda =$$

$$= 9 + 33 = 42.$$

السؤال الثالث (١٠ درجة):

أ) نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان على مجموعة E إذا:

- وجدت مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث أن $\lambda(E_0)=0$

- P محققة على $E \setminus E_0$ وغير محققة على E_0.

ب) لدينا هنا

$$\begin{cases} E = \mathbb{R} \\ E_0 = \mathbb{N} \\ P : = \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) = x^2 \quad ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

$$f(x) = 1 \neq 10 = g(x) \quad ; x \in \mathbb{N}$$

وبما أن $\lambda(\mathbb{N}) = 0$ فإن $f \overset{a.e}{=} g$

ج) لدينا هنا:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

وبما أن $\lambda(\{1\}) = 0$ فإن $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} 0$.

السؤال الرابع (٢٤ درجة):

(١) خطأ: دالة ديريكليه كمولة حسب ليبيغ وغير كمولة حسب ريمان.

(٢) خطأ: المتتالية $\{A_n\}$ متزايدة ونهايتها $[0, +\infty)$

والمتتالية $\{B_n\}$ متناقصة ونهايتها ϕ.

(٣) خطأ: يشكل σ - جبر.

(٤) خطأ: التقاطع $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ يشكل جبر.

(٥) خطأ: ليس بالضرورة، مثال دالة $\mathbb{R}$ قيوسة وغير محدودة.

(٦) خطأ: ليس بالضرورة، مثال: الدوال البسيطة قيوسة لكنها غير مستمرة.

مدرس المادة: د. ابراهيم ابراهيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني العام الدراسي 2012 / 2013
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة

اسم الطالب:

السؤال الأول (28 درجة):

(أ) اذكر تعريف كل من: الحلقة، الجبر، $\sigma-$ الحلقة، $\sigma-$ الجبر، مع إعطاء مثال عن كل منها.

(ب) لتكن $X = N$ مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن H صف المجموعات الجزئية من X المعدودة على الأكثر. أثبت أن H يشكل حلقة وجبر و $\sigma-$ حلقة و $\sigma-$ جبر على N.

السؤال الثاني (27 درجة):

لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E=[0,5)$ بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & ; \ 0\le x\le 1 \\ 2 & ; \ 1<x<2 \\ 1 & ; \ 2\le x\le 4 \\ 8 & ; \ 4<x<5. \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ 0\le x\le 1 \\ 1 & ; \ 1<x\le 3 \\ 4 & ; \ 3<x<5. \end{cases}$$

المطلوب: (أ) هل هذه الدوال بسيطة؟ وإذا كان الجواب "نعم" اكتب التمثيل الطبيعي لها.

(ب) احسب التكاملات التالية:

$$\int_E f(x)dx \ , \ \int_E g(x)dx \ , \ \int_E [f(x)+g(x)]dx.$$

السؤال الثالث (21 درجة):

(أ) اذكر تعريف "الخاصة تقريبا في كل مكان".

(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريبا في كل مكان على R:

$$f(x)=x^2 \ , \ g(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\in R\setminus N \\ 1 & ; \ x\in N. \end{cases}$$

(ج) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل:

$$f_n(x)=x^n \ ; \ x\in[0,1] \ , \ n=1,2,...$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة تقريبا في كل مكان من الدالة $f(x)=0$.

السؤال الرابع (24 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ وصحح الخطأ فيما يلي:

(1) دالة ديريخليه كمولة حسب ريمان وليست كمولة حسب ليبيغ.

(2) الصف $H=\{[a,b): -\infty<a<b<+\infty\}\cup\phi$ يشكل نصف حلقة على R.

(3) متتالية المجموعات $A_n=[0,n+1]$ متزايدة ونهايتها $[0,+\infty)$، بينما متتالية المجموعات $B_n=[n+1,+\infty)$ متناقصة ونهايتها ϕ.

(4) إذا كانت $\{H_\alpha : \alpha\in I\}$ أسرة من الحلقات على مجموعة X فيكون $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ حلقة على X.

(5) مجموعة كانتور هي مجموعة معدودة وقياسها 1.

(6) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة أو معدودة.

(7) إذا كانت الدالة $f^2(x)$ قيوسة على المجموعة E فتكون الدالة $f(x)$ قيوسة على E أيضا.

(8) تنص توطئة فاتو على ما يلي:
إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة على المجموعة E، فيكون عندئذ:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda = \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\lambda.$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 3 /7/ 2013.

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس - السنة الثالثة رياضيات

(١)

الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١١/٢٠١٢

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول (٢٨ درجة): فيما يلي نرمز X لمجموعة ما و H صف جزئي من 2^X:

(أ) الحلقة: الصف H يشكل حلقة من X إذا تحققت الشرطان التاليان

$A\cup B\in H$, $A\setminus B\in H$; $\forall A,B\in H$.

الجبر: هو حلقة فيها $X\in H$.

σ - الحلقة: الصف H يشكل σ-حلقة من X إذا تحققت الشرطان التاليان:

1) $A\setminus B\in H$; $\forall A,B\in H$

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in H$; $\forall A_i\in H$, $i=1,2,\dots$

σ - الجبر: هو σ-حلقة فيها $X\in H$.

مثال (يصلح لكل الحالات): $H=2^X$ --- طبعاً توجد أمثلة أخرى.

(ب) ليكن H صف المجموعات الجزئية المعدودة من الأكثر من $\mathbb{N}$.

H يشكل حلقة لأن: اجتماع وفرق مجموعتين معدودتين من الأكثر هو مجموعة معدودة من الأكثر، أي أنه

$A\cup B\in H$, $A\setminus B\in H$; $\forall A,B\in H$.

H يشكل جبر لأن: H حلقة و $\mathbb{N}\in H$ لأن $\mathbb{N}$ معدودة.

H يشكل σ-حلقة لأن: فرق مجموعتين معدودتين من الأكثر هو مجموعة معدودة من الأكثر، أي أن $A\setminus B\in H$ أياً كان $A,B\in H$.

كما أن اجتماع عدود لمجموعات معدودة من الأكثر هو مجموعة معدودة، أي:

$\forall A_1,A_2,\dots\in H \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in H$

H يشكل σ-جبر لأن: H يشكل σ-حلقة و $\mathbb{N}\in H$.

السؤال الثاني (٧ درجة)

(أ) نعم: $f(x)$ و $g(x)$ دوال بسيطة والتمثيل الطبيعي لها هو:

$$f(x) = 3\, I_{[0,1]}(x) + 2\, I_{(1,2)}(x) + 1\, I_{[2,4]}(x) + 8\, I_{(4,5)}(x).$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\, I_{[0,1]}(x) + 1\, I_{(1,3]}(x) + 4\, I_{(3,5)}(x).$$

(ب)

$$\int_E f(x)\, d\lambda = 3\cdot\lambda([0,1]) + 2\cdot\lambda((1,2)) + 1\cdot\lambda([2,4]) + 8\cdot\lambda((4,5))$$
$$= 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 8\cdot 1 = 15.$$

$$\int_E g(x)\, d\lambda = \frac{1}{2}\lambda([0,1]) + 1\cdot\lambda((1,3]) + 4\cdot\lambda((3,5));$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 2 = \frac{21}{2}.$$

$$\int_E [f(x)+g(x)]\, d\lambda = \int_E f(x)\, d\lambda + \int_E g(x)\, d\lambda = 15 + \frac{21}{2} = \frac{51}{2}.$$

السؤال الثالث (١٠ درجة):

(أ) نقول إن الخاصية P محققة تقريباً في كل مكان من المجموعة E إذا كان:

- توجد مجموعة جزئية $E \supset E_0$ بحيث $\lambda(E_0) = 0$
- الخاصة P محققة من $E \setminus E_0$ وغير محققة من E_0.

(ب) هنا $E_0 = \mathbb{N}$ وبالتالي $\lambda(E_0) = \lambda(\mathbb{N}) = 0$.

$$f(x) = g(x) = x^2 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

$$f(x) \neq g(x) \quad ; x \in \mathbb{N}.$$

(جـ) لدينا هنا:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

السؤال الرابع (٢٤ درجة):

(١) خطأ: الصحيح هو: دالة دير يخليه قابلة للتكامل حسب ليبيغ وليست قابلة للتكامل حسب ريمان.

(٢) صح.

~~(٣) صح~~

(٤) صح.

(٥) خطأ: الصحيح هو: مجموعة كانتور غير معدودة وقياسها يساوي صفر.

(٦) خطأ: ليس بالضرورة. مثلاً: $\mathbb{R}$ مجموعة قيوسة حسب ليبيغ لكنها غير محدودة وغير معدودة.

(٧) خطأ: الصحيح هو: اذا كانت $f^2(x)$ قيوسة فليس بالضرورة أن تكون $f(x)$ قيوسة (يمكن إعطاء مثال أيضاً).

(٨) خطأ: الصحيح هو: كتابة المتراجحة "$\geq$" بدلاً "=".

مدرس المادة: د. ابراهيم ابراهيم

جامعة البعث | امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2013 / 2014
كلية العلوم | المادة : نظرية القياس ـ السنة الثالثة رياضيات
قسم الرياضيات | العلامة : 100 درجة ـ المدة: ساعتين -- اسم الطالب:

السؤال الأول (24 درجة) :
حدد العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يلي وصحح الخاطئة منها :
(1) دالة ديريكلية كمولة حسب ليبيغ وغير كمولة حسب ريمان .
(2) الصف $H=\{[a,b):-\infty<a<b<+\infty\}\cup\phi$ يشكل σ ـجبر على R .
(3) قياس ليبيغ في R σ ـمنته .
(4) قياس ليبيغ للمجالات (a,b) ، $[a,b]$ ، $[a,b)$ هو العدد $b-a$.
(5) اذا كانت $f(x)$ دالة قيوسة على المجموعة R فتكون $f^2(x)$ قيوسة أيضاً .
(6) كل حلقة هي جبر .

السؤال الثاني (28 درجة) :
احسب قياس كل من المجموعات التالية وذلك بحسب قياس ليبيغ ، وقياس العد ، والقياس الصفري :
$A=\{2,4,6,....\}$, $B=N$, $C=R\setminus N$, $D=[1,15]$, $E=(-\infty,-1]$.

السؤال الثالث (24 درجة) :
(أ) عرف الخاصة " تقريباً في كل مكان " .
(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريباً في كل مكان على R :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & ; x\in R\setminus N\\ 0 & ; x\in N\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}\sin x & ; x\in R\setminus N\\ x & ; x\in N.\end{cases}$$

(ج) أثبت أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n & ; x\in[0,1)\\ 1 & ; x=1\end{cases} \quad ; \quad n=1,2,....$$

متقاربة تقريباً في كل مكان من الدالة $f(x)=0$ على المجال $[0,1]$.

السؤال الرابع (24 درجة) :
(أ) عرف تكامل ليبيغ لكل من : الدالة البسيطة غير السالبة ـ الدالة القيوسة غير السالبة .
(ب) لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E=[3,16)$ بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; 3\le x\le 10\\ 0 & ; x=10\\ 3 & ; 10<x<16\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}5 & ; 3\le x\le 10\\ 1 & ; 10<x<16.\end{cases}$$

احسب تكاملات ليبيغ التالية :

$$\int_E f(x)d\lambda \quad , \quad \int_E g(x)d\lambda \quad , \quad \int_E [f(x)+g(x)]d\lambda \quad .$$

انتهت الأسئلة

حمص في 16 / 1 /2014 . مع التمنيات بالنجاح والتوفيق . د. إبراهيم إبراهيم

كلية العلوم
قسم الرياضيات

٣٠٠م [illegible] نظرية القياس
س ٢٧ رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٢/ ٢٠١٦

السؤال الأول (٢٤ درجة): ٦ × ٤ = ٢٤

(١) صح

(٢) خطأ: الصف H لا يشكل σ-جبر (بل لا يشكل جبر) لأن اجتماع أي عنصرين منه ليس بالضرورة ينتمي إليه، مثال $(0,1)\cup[2,3]\notin H$.

(٣) صح

(٤) صح

(٥) صح

(٦) خطأ: [illegible] كل جبر هو حلقة.

السؤال الثاني (٢٨ درجة):

المجموعة	قياس ليبيغ (٥ × ٢ = ١٠)	قياس العد (٥ × ٢ = ١٠)	القياس الصفري (٥)
$A=\{2,4,6,\dots\}$	0	∞	0
$B=\mathbb{N}$	0	∞	0
$C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	∞	∞	0
$D=[1,15]$	14	∞	0
$E=(-\infty,-1]$	∞	∞	0

السؤال الثالث (٢٤ درجة):

(أ) نقول عن خاصية P إنها محققة تقريباً في كل مكان مع المجموعة القيوسة E إذا: (٤)

- توجد في E مجموعة جزئية $E_0\subset E$ قيوسة وقياسها $\lambda(E_0)=0$.
- الخاصية P محققة في $E\setminus E_0$.

$f(x) = g(x) = \sin x \quad ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$f(x) \neq g(x) \quad ; x \in \mathbb{N}$

$\lambda(\mathbb{N}) = 0$

لذلك يكون $f \overset{ae}{=} g$.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in (0,1) \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

وبما أن $\lambda(\{1\}) = 0$ فإن $\lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{ae}{=} 0$.

السؤال الرابع (٤ درجة):

(أ) تكامل ليبيغ للدالة البسيطة وغير السالبة $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot I_{A_i}(x)$ هو

$$\int_E \varphi(x) d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة وغير السالبة $f(x)$ هو:

$$\int_E f(x) d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_E \varphi_n(x) d\lambda ,$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة والمتقاربة على E من الدالة $f(x)$.

(ب) حساب التكاملات:

$$\int_E f(x) d\lambda = 1 \cdot \lambda([3,10]) + 0 \cdot \lambda(\{10\}) + 3 \cdot \lambda((10,16)) = 1 \cdot 7 + 0 + 3 \cdot 6 = 25 .$$

$$\int_E g(x) d\lambda = 5 \cdot \lambda([3,10]) + 1 \cdot \lambda((10,16)) = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 = 41$$

$$\int_E [f(x) + g(x)] d\lambda = \int_E f(x) d\lambda + \int_E g(x) d\lambda = 25 + 41 = 66$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2012 / 2013
المادة : نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة – المدة: ساعتين _ اسم الطالب:

السؤال الأول (24 درجة) :

حدد العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يلي وصحح الخاطئة :

(1) كل من المجالات (a,b) , $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ عبارة عن مجموعة بوريلية في R .

(2) قياس لبيغ للمجالات (a,b) , $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ هو العدد $b-a$.

(3) القياس هو دالة مجموعة $\mu : H \longrightarrow [0,+\infty]$ تحقق الشرطين :

(أ) $\mu(\phi)=0$

(ب) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \;\; ; A_i \in H.$

(4) قياس العد هو قياس منته .

(5) الصف 2^X لا يشكل جبر على X .

(6) قياس لبيغ لأية مجموعة غير منتهية يساوي $+\infty$.

(7) القياس الخارجي هو دالة مجموعة $\mu^* : 2^X \longrightarrow [0,+\infty]$ تحقق الشرط:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) \;\; ; A_i \in 2^X.$$

(8) الدالة المستمرة على مجموعة تكون قيوسة دوما .

السؤال الثاني (30 درجة) :

(أ) عرف كلا من : جبر بوريل ، المجموعة القيوسة ، الدالة القيوسة .

(ب) اذكر أربع مجموعات بوريلية في R .

(ج) هل الدالة $f(x)=x^2$ قيوسة حسب لبيغ على R .

السؤال الثالث (20 درجة) :

(أ) عرف الخاصة " تقريبا في كل مكان " .

(ب) اثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريبا في كل مكان على R :

$$f(x)=x+1 \;\; , \;\; g(x)=\begin{cases} x+1 & ; \; x\in R\setminus N \\ n & ; \; x=n\in N. \end{cases}$$

السؤال الرابع (26 درجة) :

(أ) عرف تكامل لبيغ لكل من : الدالة البسيطة غير السالبة – الدالة القيوسة غير السالبة .

(ب) احسب تكامل لبيغ للدالتين التاليتين (على المجال المرافق) :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \; 0\le x\le 2 \\ 2 & ; \; 2< x\le 5 \\ 5 & ; \; x=5 \end{cases} \;\; , \;\; g(x)=\begin{cases} 1 & ; \; -1\le x\le +1 \\ 0 & ; \; +1< x< +3 \\ 10 & ; \; +3\le x\le +6. \end{cases}$$

انتهت الأسئلة

حمص في 31 / 1 / 2013

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق . د. إبراهيم إبراهيم

كلية العلوم امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٤ / ٢٠١٣

قسم الرياضيات

السؤال الأول (٢٤ درجة):

(١) صحيح (٢) صحيح (٣) صحيح (٤) خطأ: قياس العد ليس منتهية

(٥) خطأ: χ يشكل جبر على X.

(٦) خطأ: توجد مجموعات غير منتهية وقياس لبيغ لها منتهٍ مثل المجال $[0,1]$ مجموعة غير منتهية وقياس لبيغ له $1 = 0 - 1$

(٧) خطأ: القياس الخارجي هو دالة مجموعة $H \longrightarrow [0,\infty]$: μ^* تحقق: (H حلقة)

1) $\mu^*(\phi) = 0$

2) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \ ; A_i \in H , \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$;

(٨) صحيح.

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

(أ) جبر بوريل على X: هو σ-الجبر المولَّد بصف المجموعات المفتوحة في X

وبعض المجموعة المقيوسة E هي التي تحقق:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \forall A \in 2^X$$

الدوال القيوسة: تكون الدالة f قيوسة على E إذا كانت (إحدى) المجموعات التالية قيوسة من أجل أي عدد حقيقي:

$E(f > c)$, $E(f < c)$, $E(f \geq c)$, $E(f \leq c)$.

(ب) مجموعات بوريلية: ϕ, N, Z, R, Q ، أي مجال ... إلخ.

(ج) الدالة $f(x) = x^2$ مستمرة على R فهي قيوسة حسب لبيغ (يمكن تطبيق التعريف لإثبات أن هذه الدالة قيوسة).

(ج) نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة القيوسة E إذا وجدت مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث $\lambda(E_0)=0$
الخاصة P غير محققة على E_0
الخاصة P محققة على $E \setminus E_0$

(ب) لدينا:

$f(x)=g(x) \quad ; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$f(x) \neq g(x) \quad ; x \in \mathbb{N}$

$\lambda(\mathbb{N})=0$

لذلك $f \overset{a.e}{=} g$.

السؤال الرابع (٦×٢ درجة):

(أ) تكامل ليبغ للدالة البسيطة وغير السالبة $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot I_{A_i}(x)$ هو:

$$\int_E \varphi(x)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda(A_i).$$

تكامل ليبغ للدالة القيوسة وغير السالبة $f(x)$ هو:

$$\int_E f(x)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)\,d\lambda$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة والمتقاربة على E من الدالة $f(x)$.

(ب) لنكتب:

$f(x) = 1 \cdot I_{[0,2]}(x) + 2\, I_{(2,5)}(x) + 5\, I_{\{5\}}(x)$

$g(x) = 1 \cdot I_{[-1,+1]}(x) + 0\, I_{(+1,+3)}(x) + 10\, I_{[+3,+6]}(x)$

فيكون التكامل هو:

$\int_{[0,5]} f(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,2]) + 2\,\lambda((2,5)) + 5\,\lambda(\{5\}) = 1(2)+2(3)+5(0)=8$

$\int g(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([-1,+1]) + 0\,\lambda((+1,+3)) + 10\,\lambda([+3,+6])$
$= 1(2) + 0(2) + 10(3) = 32 .$

وبالله التوفيق